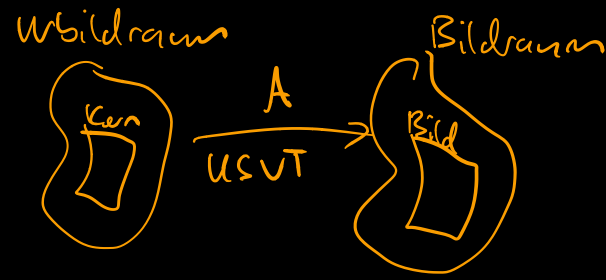
Fragestunde 18.01.2020

Singulärwertzerlegung:

Winter 2020: 3)



$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Dim? Rang? $\|A\|_2$? $A = USV^T$

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(S) = \underline{\underline{2}}$$

$$\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Dim}(S) = \underline{\underline{4 \times 3}} \text{ Matrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \underline{\underline{2}}$$

b) $A^T A \to$ EV sind V $\quad A = USV^T$

$AA^T \to$ EV sind U

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{2}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

usw.

c)

$$\mathrm{Ker}(A):\ Ax = 0 = USV^T x$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\overset{V^T}{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \cdot \overset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2s_1 \\ s_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} [2 \ \ -2 \ \ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ [1 \ \ 2 \ \ 2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ [2 \ \ 1 \ \ -2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$$\mathrm{Bild}(A): \; Ax = b = USV^Tx$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$$

Linearkombination der Spalten von U

Linearkombination der Spalten von U

$$\Rightarrow \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

d) $Ax = b$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Normalengleichung: $A^T A x = A^T b$

$\Rightarrow$ zu langsam

SVD:

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S} V^T x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \hline d_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Fehler / Residuum

$$\Rightarrow \hat{S} V^T x = d_0$$

$x = V \hat{S}^{-1} d_0$ <u>oder</u>

$V \hat{S}^{+} d_0$

$$d = U^T b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right\} d_0 \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$$x = V \hat{S}^+ d_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

$$S = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} \hat{S} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \rightarrow \hat{S}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bei Pseudoinverse bleibt 0 einfach 0!

Algebraische & Geometrische Vielfachheit:

$$EW: \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2$$

$$AM = 1 \qquad AM = 1 \qquad AM = 1$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2$$

$$AM = 2 \qquad\qquad AM = 1$$

$$1 \leq \underline{GM} \leq AM \leq n$$

$$E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad GM = 2!$$

$$E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad GM = 1!$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EGAL!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$$

$$Ax = b$$

$$USV^T x = b$$

$$SV^T x = U^T b = d$$

$$d = U^T b$$

$$x = V\hat{S}^{-1} d_0$$

Differentialgleichungssysteme 1. Ordn.:

$$\dot{y} = Ay \quad , \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{symm.}$$

a)

$$\text{EW: } \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-2\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -2\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-2\lambda)\det\begin{bmatrix} -2\lambda & -2 \\ -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= (1-2\lambda)\left[4\lambda^2 - 2\lambda - 4\right] + 2\left[4\lambda\right] + \left[2\lambda + 4\right]$$

$$= (1-2\lambda)\left[4\lambda^2 - 2\lambda - 4\right] + 10\lambda + 4$$

$$= -8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 16\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$8\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0$$

$$8(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda \pm a)(\lambda \pm b)$$

$$8(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -1$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{EV: } (A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_3 = -1: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$x(t) = T^{-1} y(t)$$

$$\dot{y} = Ay = T D \underbrace{T^{-1} y}_{x}$$

$$T^{-1}\dot{y} = D T^{-1} y$$

$$\dot{x} = Dx \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{Dt} x_0, \quad x_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Te^{Dt}x_0 = c_1 e^{0t}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

c)

$$y(0) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow x(t) = T^{-1}y(t)$$

$$T\,x(0) = y(0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&-1&2&1\\1&1&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&-1&2&1\\0&2&2&1\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&-1&2&1\\0&0&6&3\end{array}\right]$$

$c_3 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$, $c_1 = -\frac{1}{2}$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

Spektralsatz: Für symmetrische Matrizen A:

- Alle EW von $A \in \mathbb{R}$
- Alle EV zu versch. EW stehen orthogonal zueinander
- A ist (min.) halbeinfach $\rightarrow$ AM = GM

$\Rightarrow$ A besitzt eine orthonormale Eigenbasis

Reelle Matrizen:

$A \in \mathbb{R}$: EW von A sind $\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, aber dann ist $\bar{\lambda}$ auch ein EW von A

Bsp.: $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$?

Lineare Abbildungen:

Frühling 2019, A. 4:

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ und $\mathcal{U}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_3 \\ x(t) &\longmapsto x(0) + t \cdot x'(0) + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot x''(0), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_3$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist. $\boxed{[\mathcal{A}(x)](t)}$

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_3$ sind, wobei

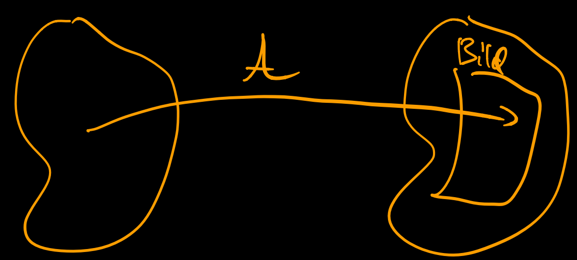
$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 - t, \qquad p_3(t) = 1 + t + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 1 + t^2, \qquad q_3(t) = 1 - t^2.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

$$G_3 \xrightarrow{\mathcal{A}} U_3$$

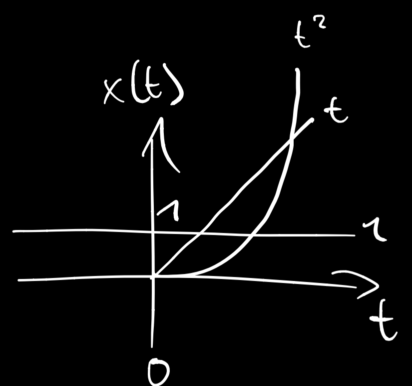


a) $\mathcal{A}$ ist wohldefiniert, da:

$$\mathcal{A}(\boxed{1}) = 1 + t \cdot 0 + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot 0 = \underline{1} \in \boxed{U_3}$$

$$\mathcal{A}(\boxed{t}) = \underset{t}{0} + t \cdot 1 + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot 0 = \underline{t} \in \boxed{U_3}$$

$$\mathcal{A}(\boxed{t^2}) = \underset{t^2}{0} + t \cdot \underset{2t}{0} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot 2 = \underline{t^2} \in \boxed{U_3}$$



$x(t) = t$

$$\underset{\overset{\Uparrow}{U_3}}{\mathcal{A}(1+t+t^2)} = \underset{\overset{\Uparrow}{U_3}}{\mathcal{A}(1)} + \underset{\overset{\Uparrow}{U_3}}{\mathcal{A}(t)} + \underset{\overset{\Uparrow}{U_3}}{\mathcal{A}(t^2)}$$

Deshalb zeigt das die Wohldefiniertheit

Überprüfen $\mathcal{A}$ auf Linearität:

$\forall a, b \in G_3, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{aligned} a(t) &= a_1 + a_2 t + a_3 t^2 \\ b(t) &= b_1 + b_2 t + b_3 t^2 \end{aligned} \right)$$

(i) $\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$

(ii) $\mathcal{A}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{A}(a)$

Überprüfen (i) & (ii):

$$\mathcal{A}(\underbrace{a + \alpha b}_{x(t)}) \stackrel{!}{=} \mathcal{A}(a) + \alpha \mathcal{A}(b)$$

$$= a(0) + \alpha b(0) + t \cdot [a(t) + \alpha b(t)]'(0) + \frac{1}{2} t^2 [a(t) + \alpha b(t)]''(0)$$

$$= a(0) + \alpha b(0) + t(a'(0) + \alpha b'(0)) + \frac{1}{2} t^2 (a''(0) + \alpha b''(0))$$

$$= a(0) + t a'(0) + \frac{1}{2} t^2 a''(0) + \alpha \left[b(0) + t b'(0) + \frac{1}{2} t^2 b''(0) \right] \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{A} C_1$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_1^{-1}} 1 \xrightarrow{\mathcal{A}} 1 \xrightarrow{k_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{tikzcd} G_3 \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "k_1"] & U_3 \arrow[d, "k_1"] \\ B_1 \arrow[r, "A"] & C_1 \end{tikzcd}$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{A}} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$t \xrightarrow{\mathcal{A}} t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$t^2 \xrightarrow{\mathcal{A}} t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $P = \{p_1 = 1+t,\ p_2 = 1-t,\ p_3 = 1+t+t^2\} \in G_3$

$Q = \{q_1 = t,\ q_2 = 1+t^2,\ q_3 = 1-t^2\} \in U_3$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{p_1+p_2}{2} \\ t &= \frac{p_1-p_2}{2} \\ t^2 &= p_3 - p_1 \end{aligned}\right\}$$

P ist ein Erzeugendensystem & minimal, da 3 Vektoren und G_3 3-dim.

$\rightarrow$ Basis

1)
$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{q_2+q_3}{2} \\ t &= q_1 \\ t^2 &= \frac{q_2-q_3}{2} \end{aligned}\right\}$$

Q ist ein ES & minimal, da 3 Vektoren und U_3 3-dim.

$\rightarrow$ Basis

2)
$$\begin{array}{ccc|c} q_1 & q_2 & q_3 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

Rang 3 $\rightarrow$ lin. unabhängig & erzeugend, da 3 Vekt. & U_3 3-dim.

d) $P \xrightarrow{B} Q$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2^{-1}} 1+t \xrightarrow{A} 1+t \xrightarrow{k_2'}$

$1+t \xrightarrow{A} 1+t = 1t + \frac{1}{2}(1+t^2) + \frac{1}{2}(1-t^2)$

$1-t \xrightarrow{A} 1-t = -1t + \frac{1}{2}(1+t^2) + \frac{1}{2}(1-t^2)$

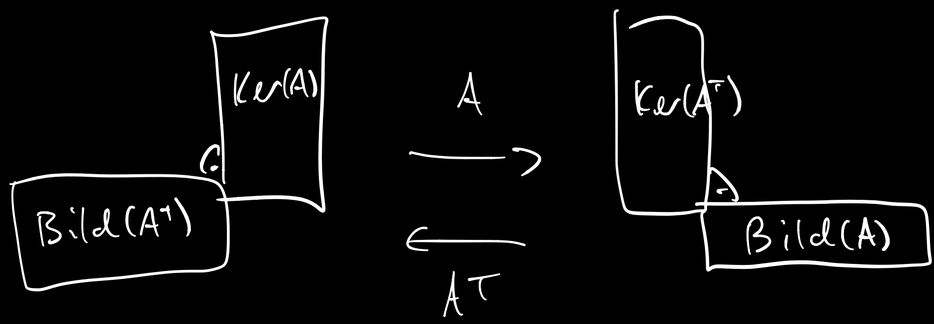
$1+t+t^2 \xrightarrow{A} 1+t+t^2 = 1t + 1(1+t^2) + 0(1-t^2)$

$$\begin{tikzcd} G_3 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & U_3 \arrow[d, "k_1'"'] \arrow[dd, bend left, "k_2'"] \\ B_1 \arrow[r, "A"] & C_1 \\ P \arrow[u, "T"] \arrow[r, "B"] & Q \arrow[u, "T'"'] \end{tikzcd}$$

$B = T^{-1} A T$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalsatz der lin. Algebra:



Schur-Zerlegung:

Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oder $\mathbb{C}^{n\times n}$ hat eine Schur-Zerlegung:

$$A = U \cdot R \cdot U^T$$

U orth. respektive unitär

R r.o.d.

Auf der Diagonalen von R stehen die Eigenwerte von A.

$$A = URU^T$$

$$AU = UR \qquad A^H = A = A^T$$

$$Aq = \lambda q$$

$$q \in EV$$